第 10 章　三角恒等变换

10.1　两角和与差的三角函数

10.1.1　两角和与差的余弦+

10.1.2　两角和与差的正弦+

10.1.3　两角和与差的正切

1. C 【解析】因为$\frac{\sin 40°\sin 80°}{\cos 40°+\cos 60°}$

$=\frac{\sin(60°-20°)\sin(60°+20°)}{\cos(20°+20°)+\frac{1}{2}}$

$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin 20°\right)^2}{\frac{3}{2}-2\sin^2 20°}$

$=\frac{\frac{3}{4}\cos^2 20°-\frac{1}{4}\sin^2 20°}{2\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20°\right)}$

$=\frac{\frac{3}{4}-\sin^2 20°}{2\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20°\right)}$

$=\frac{1}{2}$,

所以原式$=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

2. C 【解析】因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha+\beta<\pi$, 所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{4}{5}$. 又$-\frac{\pi}{4}<\beta-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$, 所以 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{12}{13}$. 所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos(\alpha+\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$. 故选 C.

3. B 【解析】因为$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\tan\alpha=3>1$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha+\beta<\pi$，又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$，

故 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=-2$，

故 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{-2-3}{1+(-2)\times3}=1$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{3-1}{1+3\times1}=\frac{1}{2}$，故选 B.

4. B 【解析】$\because\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个根，$\therefore\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}<0$，$\tan\alpha\tan\beta=4>0$，

$\therefore\tan\alpha<0$，$\tan\beta<0$，$\therefore\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$.

$\because\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\therefore\alpha+\beta\in(-\pi,0)$，

$\therefore\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$，故选 B.

5. C 【解析】$\because\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6-4\sqrt{5}}{15}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$\therefore\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. A 【解析】$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right)$，则 $\alpha-\frac{\pi}{4}$ 在第二或第三象限，

因为 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，当 $\alpha-\frac{\pi}{4}$ 在第三象限时，由于 $\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $y=\cos x$ 在 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增，且 $-\frac{3}{5}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以当 $\alpha-\frac{\pi}{4}$ 在第三象限时，$\alpha-\frac{\pi}{4}>\frac{5\pi}{4}$，与 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ 矛盾，

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}$ 在第二象限，

因为 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$.

因为 $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\beta-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，则 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)<0$.

因为 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{13}$，所以 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{12}{13}$.

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{16}{65}$，

即 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{16}{65}$.

7. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ 【解析】$\cos A+\sin C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-C\right)+\sin C=\cos\frac{5\pi}{6}\cos C+\sin\frac{5\pi}{6}\sin C+\sin C=\frac{3}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C\right)=$

$\sqrt{3}\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$.

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，则$A=\frac{5\pi}{6}-C<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<C<\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，

所以$\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，从而$\cos A+\sin C$的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

8.【证明】$\because 2\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+\beta)$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，

$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

$5\sin\beta=5\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=5\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha-5\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

由已知得$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=5\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-5\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

$\therefore 2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

等式两边同时除以$\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$，得$2\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$.

9.【解】(1)$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore \alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{20}$.

(2)$\because \beta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore \beta+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore \cos\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\because \alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore \alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}.$

10. C 【解析】由题知，$f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$，最大值为 $\sqrt{2}$. 故选 C.

11. ABD 【解析】对于 A，$\sin 2A=\sin 2B$，则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，$\therefore A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，故 $\triangle ABC$ 不一定是等腰三角形，故 A 错误；

对于 B，由 $\tan A\tan B>0$，且 A,B 不能同为钝角，即 $\tan A$，$\tan B$ 不能同为负，得 $\tan A$，$\tan B$ 同为正，即 A,B 均为锐角，

又 $\begin{cases}\tan A\tan B<1,\\ \cos A\cos B>0,\end{cases}$ $\therefore \sin A\sin B-\cos A\cos B=-\cos(A+B)<0$，即 $\cos(\pi-C)=-\cos C>0$，$\cos C<0$，$\therefore C$ 为钝角，故 B 错误；

对于 C，在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，$\therefore 2\cos A\sin B=\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)=0$，$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore A-B\in(-\pi,\pi)$，$\therefore A-B=0$，即

$A=B$,则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,故 C 正确;

对于 D,$\triangle ABC$ 是锐角三角形,当 $B\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$\sin B\leqslant\cos B$,故 D 错误. 故选 ABD.

12. ABC 【解析】函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

对于 A,因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,又 $y=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减,故 A 正确;

对于 B,当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\frac{3\pi}{2}=0$,故 B 正确;

对于 C,因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,$f(x)\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$,故 C 正确;

对于 D,$f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到函数 $y=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos 2x$ 的图象,故 D 错误. 故选 ABC.

13. $\left[2,\frac{2\sqrt{57}}{3}\right]$ 【解析】以 P 为原点,建立如图所示的平面直角坐标系.

由题意得,$A(6,0)$,$B(-3,3\sqrt{3})$,

设 $\angle APC=\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$,则点 C 的坐标为 $(6\cos\theta,6\sin\theta)$.

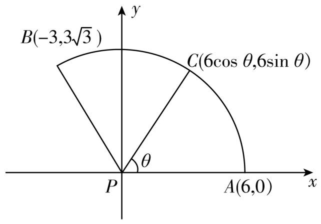
因为 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$,所以 $(6\cos\theta,6\sin\theta)=x(6,0)+y(-3,3\sqrt{3})=(6x-$

$3y$，$3\sqrt{3}y$），所以$\begin{cases}6x-3y=6\cos\theta,\\3\sqrt{3}y=6\sin\theta,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta,\\y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta,\end{cases}$

所以 $2x+3y=2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)+3\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin\theta+2\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{57}}{3}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{57}}{19}$，$\cos\varphi=\dfrac{4\sqrt{19}}{19}$.

因为 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\sqrt{57}}{19}\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant1$，所以 $2\leqslant\dfrac{2\sqrt{57}}{3}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\dfrac{2\sqrt{57}}{3}$. 所以 $2x+3y$ 的取值范围是 $\left[2,\dfrac{2\sqrt{57}}{3}\right]$.



14.【解】(1) $\because \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，

$\therefore(-1,\sqrt{3})\cdot(\cos A,\sin A)=1$，

即$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

即 $2\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

$\therefore\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\because 0<A<\pi$，$\therefore -\dfrac{\pi}{6}<A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，则 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 由 $\tan\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan B+1}{1-\tan B}=-3$，

解得 $\tan B=2$.

由(1)知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\tan A=\sqrt{3}$，

$\therefore\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+$

$B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\dfrac{8+5\sqrt{3}}{11}$.

15. C 【解析】因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

所以 $0\leqslant\sin x\leqslant1,0\leqslant\cos x\leqslant1$.

由 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$，

得 $y^2=\sin x+2\sqrt{\sin x\cdot\cos x}+\cos x$.

设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$，

因为 $x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

所以 $t\in[1,\sqrt{2}]$，所以 $y^2=t+2\sqrt{\dfrac{t^2-1}{2}}=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$，$t\in[1,\sqrt{2}]$.

在 $[1,\sqrt{2}]$ 上，$y^2=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$ 单调递增，

当 $t=1$ 时，$y^2=1$；当 $t=\sqrt{2}$ 时，$y^2=2\sqrt{2}$，所以 $1\leqslant y^2\leqslant2\sqrt{2}$，

又 $y>0$，所以 $1\leqslant y\leqslant\sqrt[4]{8}$. 故选 C.

10.2　二倍角的三角函数

1. C 【解析】对于 A，$\dfrac{1}{2}(\cos 15°-\sin 15°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45°\cos 15°-\sin 45°\sin 15°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(45°+15°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 60°=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，A 不符合；

对于 B，$\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，B 不符合；

对于 C，$\dfrac{\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=\dfrac{1}{2}\cdot\tan 45°=\dfrac{1}{2}$，C 符合；

对于 D，$\sin 15°\cos 15°=\dfrac{1}{2}\sin 30°=$

$\frac{1}{4}$,D 不符合. 故选 C.

2. B 【解析】原式$=\dfrac{1+\tan\frac{\pi}{12}-1+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故选 B.

3. A 【解析】当 $|\cos\alpha|=\frac{\sqrt{21}}{5}$ 时,

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2-1=\frac{17}{25}$;

当 $\cos 2\alpha=\frac{17}{25}$ 时, $2\cos^2\alpha-1=\frac{17}{25}$, 得 $|\cos\alpha|=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

故“$|\cos\alpha|=\frac{\sqrt{21}}{5}$”是“$\cos 2\alpha=\frac{17}{25}$”的充要条件. 故选 A.

4. A 【解析】因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}(0<\alpha<\pi)$, 所以 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$, 所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{4}$.

又 $0<\alpha<\pi$, 所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$,

故 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$, $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$, 即 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{2}$.

所以 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$. 故选 A.

5. 0 或 $\frac{\pi}{4}$ 【解析】$\because \cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\cos 2\theta+1}{2}=1$,

$\therefore \sin 2\theta+\cos 2\theta=1$,

$\therefore \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because \theta\in[0,\pi)$,

$\therefore 2\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$,

$\therefore 2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$,

$\therefore \theta=0$ 或$\frac{\pi}{4}$.

6.【证明】左边

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1-2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{2\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos\alpha}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\alpha=$右边,即原式成立.

7.【解】(1)因为$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$,则 $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha<0$, $1-\sin\alpha>0$,所以$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}+\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}+\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$.

(2)由于$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$, $\sin\alpha+\cos\alpha>0$,

因而 $\sqrt{2+2\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}-\sqrt{1+\sin 2\alpha}$

$=\sqrt{2+4\cos^2\alpha-2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=2\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=0$.

8.【解】$\because 3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$,

$\therefore 3\sin^2\alpha=\cos 2\beta$,①

$\because 3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$,

$\therefore 3\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\beta$,②

①②两式相除得$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$,

$\therefore \cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta=0$,

即 $\cos(\alpha+2\beta)=0$.

又$\because \alpha,\beta$ 均为锐角,$\therefore 0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$,

$\therefore \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

9.【解】(1)由 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,

得 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$

$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=-\frac{7}{25}$.

(2)因为 α 为锐角,

所以 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$2\alpha\in(0,\pi)$,所以 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{24}{25}$,故 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$

$-\frac{24}{7}$.

因为 α,β 为锐角,

所以 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$\alpha+\beta\in(0,\pi)$,

又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=$

$\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-\frac{1}{2}$,

则 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]$

$=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha+\beta)}$

$=\frac{-\frac{24}{7}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{24}{7}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{41}{38}$.

10. C　【解析】依题意可知 $\sin 18°=$

$\frac{\frac{1}{2}BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,所以 $\sin 126°=$

$\sin(90°+36°)=\cos 36°=1-2\sin^2 18°=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 故选 C.

11. A 【解析】因为关于 x 的方程 $x^2-x\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$ 有一个根是 1,

所以 $1-\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$, 所以 $\sin^2\frac{C}{2}=\cos A\cos B$, 即 $\frac{1-\cos C}{2}=\cos A\cos B$,

所以 $1=2\cos A\cos B-\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)$.

因为 $0<A<\pi$,$0<B<\pi$,所以 $-\pi<A-B<\pi$,所以 $A-B=0$,所以 $A=B$,所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. 故选 A.

12. ABC 【解析】因为 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确;

$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 故 B 正确;

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$, 所以 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 故 C 正确;

令 $-\pi+2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

解得 $-\frac{\pi}{2}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

13. $[0,2]$ 【解析】设 $t=\cos^2x-\sin^2x$, 则 $t=\cos 2x$, 且 $t\in[-1,1]$,

所以 $t^2=\sin^4x+\cos^4x-2\cos^2x\sin^2x=\sin^4x+\cos^4x-\frac{1}{2}\sin^2 2x$,

所以 $\sin^4 x+\cos^4 x=t^2+\frac{1}{2}\sin^2 2x=t^2+\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)=t^2+\frac{1}{2}(1-t^2)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$,

所以 $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x$ 可转化为 $g(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}+t=\frac{1}{2}(t+1)^2,t\in[-1,1]$,

当 $t=-1$ 时,$g(t)$ 取得最小值 0,当 $t=1$ 时,$g(t)$ 取得最大值 2,

所以 $g(t)$ 的值域为 $[0,2]$,即 $f(x)$ 的值域为 $[0,2]$.

14. $(-\infty,2]$ 【解析】由 $2+\sin 2\theta-a\sin\theta-a\cos\theta\geqslant 0$,得 $1+(\sin\theta+\cos\theta)^2\geqslant a(\sin\theta+\cos\theta)$.

因为 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[0,\sqrt{2}]$.

当 $\sin\theta+\cos\theta=0$ 时,不等式恒成立;

当 $\sin\theta+\cos\theta\neq 0$ 时,不等式化为 $a\leqslant\frac{1+(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$.

令 $\sin\theta+\cos\theta=t,t\in(0,\sqrt{2}]$,则 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递增,所以 $f(t)_{\min}=f(1)=2$,所以 $a\leqslant 2$,当且仅当 $\sin\theta+\cos\theta=1$,即 $\theta=0$ 时,等号成立.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

10.3 几个三角恒等式

1. C 【解析】$\sin 37.5^\circ\cos 7.5^\circ=\frac{1}{2}[\sin(37.5^\circ+7.5^\circ)+\sin(37.5^\circ-7.5^\circ)]=\frac{1}{2}(\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)=$

$\frac{\sqrt{2}+1}{4}$.

2. A 【解析】因为 $a=\cos^2 12°-\sin^2 12°=\cos 24°$,

$b=\frac{2\tan 12°}{1-\tan^2 12°}=\tan 24°<\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°<\cos 24°=a$,

$c=\sqrt{\frac{1-\cos 48°}{2}}=\sin 24°<\frac{\sin 24°}{\cos 24°}=\tan 24°=b$,所以 $c<b<a$.

3. B 【解析】因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$,

所以$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2-\cos\alpha}$.

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$,

所以 $2-\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$,

即 $2-\cos\alpha=1+\cos\alpha$,

解得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

故选 B.

4. B 【解析】$\cos A\sin C=\frac{1}{2}[\sin(A+C)-\sin(A-C)]=\frac{1}{2}[\sin 135°-\sin(A-C)]=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\sin(A-C)$.

由$-135°<A-C<135°$,

得 $\sin(A-C)\in[-1,1]$,

则 $\cos A\sin C\in\left[\frac{\sqrt{2}-2}{4},\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right]$. 故选 B.

5. $\frac{1}{2}$ 【解析】原式$=\cos 40°+\cos 80°+\cos 60°-\cos 20°=2\cos 60°\cdot$

$\cos(-20°)+\cos 60°-\cos 20°=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$.

6. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　【解析】因为 $\cos 2\theta=-\dfrac{23}{25}$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，依据半角公式得

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{23}{25}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1-\frac{23}{25}}{2}}=-\dfrac{1}{5}$，所以 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1+\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

7.【解】由 α,β 均为锐角，得 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$. 又 $\sin\alpha-\sin\beta=-\dfrac{2}{3}<0$，所以 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{4}{9}$，①

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{4}{9}$，②

①+②，得 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{8}{9}$，解得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{5}{9}$，

即 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{9}$，

则 $\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{14}}{9}$，

则 $\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$.

8. B　【解析】由已知得 $\dfrac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=\dfrac{1}{2}(1+\cos C)$. 又 $A+B=\pi-C$，

$\therefore \cos(A-B)-\cos(\pi-C)=1+\cos C$,

$\therefore \cos(A-B)=1$. 又$-\pi<A-B<\pi$,

$\therefore A-B=0$, $\therefore A=B$, 则$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

9. B 【解析】$\sin A-\sin B=2\sin A\sin^2\frac{C}{2}=2\sin A\times\frac{1-\cos C}{2}=\sin A-\sin A\cos C$, 故

$\sin B=\sin A\cos C$,

其中 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C$,

故 $\cos A\sin C=0$,

因为 $C\in(0,\pi)$, 所以 $\sin C\neq 0$, 故

$\cos A=0$. 因为 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A=\frac{\pi}{2}$,

故$\triangle ABC$ 为直角三角形.

10. B 【解析】因为 $OM=2$, $\angle AOM=x$, $\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$, 所以$\angle BOM=\frac{3\pi}{4}-x$,

所以 $OE=OM\cdot\cos\angle AOM=2\cos x$,

$ME=OM\cdot\sin\angle AOM=2\sin x$,

$OF=OM\cdot\cos\angle BOM=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$,

$MF=OM\cdot\sin\angle BOM=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$,

所以 $S_{四边形MEOF}=S_{\triangle MOE}+S_{\triangle MOF}=\frac{1}{2}\times 2\sin x\cdot 2\cos x+\frac{1}{2}\times 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\times 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

$=\sin 2x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$

$=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, 故选 B.

11. BC 【解析】$\cos 3x=\cos(2x+x)$

$=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=(2\cos^2x-1)\cos x-2\sin^2x\cos x$

$=(2\cos^2x-1)\cos x-2(1-\cos^2x)\cos x$

$=4\cos^3x-3\cos x$,

所以 $P_3(t)=4t^3-3t$, A 错误.

$\cos 4x=\cos(2\cdot 2x)=\cos^2 2x-\sin^2 2x$

$=(2\cos^2x-1)^2-4\sin^2x\cos^2x$

$=4\cos^4x-4\cos^2x+1-4(1-\cos^2x)\cos^2x$

$=8\cos^4x-8\cos^2x+1$,

所以 $P_4(t)=8t^4-8t^2+1$, B 正确.

$\cos 5x=\cos(4x+x)$

$=\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x$

$=(8\cos^4x-8\cos^2x+1)\cos x-2\sin 2x\cos 2x\sin x$

$=8\cos^5x-8\cos^3x+\cos x-4\sin^2x(2\cos^2x-1)\cos x$

$=8\cos^5x-8\cos^3x+\cos x-4(1-\cos^2x)(2\cos^2x-1)\cos x$

$=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x$.

所以 $\cos 90°=\cos(5\times 18°)=16\cos^5 18°-20\cos^3 18°+5\cos 18°=0$,

由于 $\cos 18°\neq 0$, 所以 $16\cos^4 18°-20\cos^2 18°+5=0$,

由于 $\cos 18°>\cos 30°$, 所以 $\cos^2 18°>\cos^2 30°=\frac{3}{4}$,

所以由 $16\cos^4 18°-20\cos^2 18°+5=0$

得 $\cos^2 18°=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$,

所以 $\sin 18°=\sqrt{1-\cos^2 18°}=\sqrt{1-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, C 正确.

$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\neq\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$, D 错误. 故选 BC.

12.【解】(1)原式

$=\frac{(1+\cos 2\alpha)+\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$

$=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha.$$

(2)原式$=\frac{(\sin A+\sin 5A)+2\sin 3A}{(\sin 3A+\sin 7A)+2\sin 5A}$

$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$$

$$=\frac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}$$

$$=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

13.【解】(1)由题可知,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle MOC$ 中,$OM=30\cos\theta$,

$MC=30\sin\theta$,$\therefore BN=CM=30\sin\theta$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BON$ 中,

$ON=\frac{BN}{\tan\angle BON}=\frac{30\sin\theta}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}\sin\theta$,

$\therefore MN=OM-ON=30\cos\theta-10\sqrt{3}\sin\theta$.

$\therefore S_{矩形ABCD}=2\cdot BN\cdot MN$

$=2\times 30\sin\theta\times(30\cos\theta-10\sqrt{3}\sin\theta)$

$=600\sqrt{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-300\sqrt{3}$,

即 $S=600\sqrt{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-300\sqrt{3}$,

$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)$\because\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,$\therefore 2\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,$\therefore$ 当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{6}$时,$S_{\max}=300\sqrt{3}$,故当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时,矩形 $ABCD$ 的面积最大,最大面积为 $300\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

14.【解】因为 $3\cos\alpha+2\sin\alpha=c$,$3\cos\beta+2\sin\beta=c$,两式作差可得,

$3(\cos\alpha-\cos\beta)+2(\sin\alpha-\sin\beta)=0$,

即 $-6\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$,$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\right.$

$3\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)=0$,

所以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ 或 $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-3\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$，即 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ 或 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{3}$,

当 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ 时, $\alpha-\beta=2m\pi\,(m\in\mathbf{Z})$, 与题设 $\alpha-\beta\neq k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ 矛盾, 故舍去;

当 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{3}$ 时, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2\times\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{12}{5}$.